

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему **«Керованість деякого класу майже
трикутних систем»**

Виконала: студентка групи МП41,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»

Шеховцова Є.О.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор,
завідувач кафедри
прикладної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразі-
на

Коробов В.І.

Рецензент: доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри КІТАР
Харківського національного
університету радіоелектроніки

Ромашов Ю.В.

Харків — 2025 рік

Анотації

Шеховцова Єлизавета Олегівна. Керованість деякого класу майже трикутних систем. У роботі ми розширимо клас трикутних систем, розглянувши системи, які майже відображаються на лінійні системи. Також розширимо підхід, заснований на лінеаризації трикутних систем Коробовим В. І., на нові класи нелінійних систем керування, які є майже лінеаризованими. Це означає, що при заміні змінних і керування всі рівняння вихідної нелінійної системи, крім одного, приводяться до лінійної системи.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, майже трикутні системи, трикутні системи, лінеаризація.

Shekhovtsova Yelyzaveta. Controllability of a certain class of almost triangular systems. In this study, we extend the class of triangular systems by considering systems that are almost linearizable. We also generalize the approach based on the linearization of triangular systems, originally proposed by V. I. Korobov, to new classes of nonlinear control systems that are almost linearizable. This means that, under the specific change of variables and control, all but one of the equations of the original nonlinear system can be transformed into a linear form.

Keywords: nonlinear control systems, almost triangular control systems, triangular systems, linearization.

Зміст

Вступ	4
1. Керованість майже трикутних систем	7
1.1. Постановка задачі	7
1.2. Алгоритм побудови керування для майже трикутних систем	8
2. Керованість деякого класу майже трикутних систем	14
2.1. Застосування алгоритму до нового класу майже трикутних систем	14
2.2. Приклад	17
Висновки	21
Список використаних джерел	22

Вступ

Проблеми лінеаризації нелінійних систем керування привертають до себе велику увагу протягом кількох десятиліть. Якщо для нелінійної керованої системи вдається здійснити перетворення змінних і керування так, щоб вона набула лінійного вигляду, то задача керованості цієї системи може бути вирішена за допомогою класичних підходів лінійної теорії керування.

У 1973 році Коробов В.І. у своїй роботі [1] ввів новий клас нелінійних систем, так звані трикутні системи, що повністю відображаються на лінійні. Трикутні системи за означенням мають вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\end{aligned}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$

У цій статті [1] наведено конструктивне доведення методу лінеаризації трикутних систем. Зазначається, що, зробивши певну заміну змінних, такі системи можна звести до наступного лінійного вигляду

$$\begin{aligned}\dot{z}_k &= z_{k+1}, k = \overline{1, n-1} \\ \dot{z}_n &= v\end{aligned}$$

де $z = F(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $v = g(x, u) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Такий метод дозволяє для початкової і кінцевої точок (x^0 та x^1 відповідно) та заданого часу T знайти

керування $u(t)$ і відповідну траєкторію $x(t)$ початкової системи так, щоб $x(0) = x^0$, $x(T) = x^1$.

Питання зведення нелінійних систем до лінійного вигляду також було досліджено у статтях [2], [3] [4], [5].

У 2021 році Коробов В.І. розширив клас цих трикутних систем, ввівши поняття майже трикутних систем, яке вказано у статті [6].

Означення 0.1. Під майже трикутною системою будемо вважати систему вигляду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\end{aligned}\tag{0.1}$$

де функції $f_i(x_1, \dots, x_{i+1})$ для $i = 1, \dots, n$ мають неперервні часткові похідні до порядку $n - i + 1$ включно.

Також припускаємо, що

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad x_1, \dots, x_{i+1} \in \mathbb{R}, \quad i = 2, \dots, n$$

Для зручності будемо позначати $u(t)$ через $x_{n+1}(t)$.

Також у 2024 вийшла стаття [7], у якій Коробов В.І., Скляр К.В та Ігнатювич С.Ю. запропонували ширший клас майже трикутних систем, до якого застосовують метод із статті [6].

У даному дослідженні буде розглянуто новий клас майже трикутних систем, для яких можна явно побудувати керування, що переводить систему з однієї заданої точки в іншу. Для систем цього класу буде застосовано алгоритм лінеаризації, наведений у статті [6], для знаходження керування і траєкторій. В кінці наведемо конкретний приклад для того, щоб продемонструвати конструктивність нашого підходу.

Розділ 1

Керованість майже трикутних систем

1.1. Постановка задачі

Виділимо такий клас майже трикутних систем, де x_1 є тільки у правій частині першого рівняння, а решта рівнянь не залежить від x_1 . Розглянемо n -вимірну систему виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_2, x_3, x_4) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_2, x_3, \dots, x_n, u_2)\end{aligned}\tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \in \mathbb{R}^1$, $u_2 \in \mathbb{R}^1$, $f_n(x_2, x_3, \dots, x_n, u_2) \in C^1$, $f_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n) \in C^2$, $\dots$, $f_2(x_2, x_3) \in C^{n-2}$, $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in C^1$.

Також маємо умову на часткові похідні

$$\left| \frac{\partial f_i(x_2, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad x_2, \dots, x_{i+1} \in \mathbb{R}, \quad i = 2, \dots, n$$

Бачимо, що перше рівняння містить керування $u_1(t)$, яке входить до цього рівняння лінійно. Крім цього, останнє рівняння такої системи залежить ще від одного керування, а саме від $u_2(t)$.

Наша задача полягає в тому, щоб побудувати керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$, що переводять задану систему з початкової точки x^0 у початок координат x^1 за час T . Для цього детально розглянемо метод лінеаризації майже трикутних систем виду (0.1), наведений Коробовим В.І. у статті [6], та застосуємо його до нового класу майже трикутних систем.

1.2. Алгоритм побудови керування для майже трикутних систем

Розглянемо майже трикутну систему (0.1). Необхідно побудувати керування $u(t)$, яке переводить задану точку x^0 в задану точку x^1 в силу цієї системи, та траєкторію $x = x(t)$ системи (0.1). Для цього будемо використовувати метод, що наведений Коробовим В.І. у статті [6]. Як зазначено у статті [6], спершу потрібно знайти заміну змінних та керування, яке буде відображати систему (0.1) без першого рівняння у лінійну систему. Така заміна змінних має вигляд

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 = F_1(x_1), \\ z_2 &= x_2 = F_2(x_1, x_2), \\ z_3 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv F_3(x_1, x_2, x_3), \\ z_k &= \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_1} f_1(x_1, x_1, x_3) + \\ &+ \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) \equiv F_k(x_1, \dots, x_k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

При цьому керування буде мати вигляд

$$x_{n+1} = \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_1, x_3) + \sum_{i=2}^n \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i+1}} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) \equiv$$

$$\equiv F_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \quad (1.3)$$

Згідно з нашим припущенням $F_k(x_1, \dots, x_k)$ має неперервні часткові похідні до $n - k + 2$ порядку.

Покажемо, що система (1.2), (1.3) має єдиний розв'язок відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ та покажемо, що $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ можуть бути виражені через $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$.

Очевидно, що з перших двох рівнянь маємо

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2$$

Далі x_3 можемо знайти з третього рівняння системи (1.2)

$$z_3 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

За вищезазначеним припущенням $\left| \frac{\partial f_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right| \geq a > 0$. Це означає, що функція $f_2(x_1, x_2, x_3)$ монотонна відносно змінної x_3 . Крім цього, при фіксованих x_1 та x_2 функція $f_2(x_1, x_2, x_3)$ ін'єктивна і переводить $(-\infty, +\infty)$ в $(-\infty, +\infty)$. З цього випливає, що x_3 виражається єдиним чином через змінні z_1, z_2, z_3 з третього рівняння системи (1.2).

Нехай x_3 має вигляд $x_3 = H_3(z_1, z_2, z_3)$. Також вважаємо, що функція $H_3(z_1, z_2, z_3)$ неперервно диференційовна по всіх аргументах. Далі покажемо, що решта змінних може бути виражена аналогічним чином. Для цього застосуємо метод математичної індукції.

Припустимо, що відомо представлення перших $k - 1$ змінних ($k \geq 4$)

$$\begin{aligned} x_3 &= H_3(z_1, z_2, z_3), \\ &\dots \\ x_{k-1} &= H_{k-1}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) \end{aligned}$$

Покажемо, що

$$x_k = H_k(z_1, z_2, \dots, z_k). \quad (1.4)$$

Оскільки $k \geq 4$, то

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \dots, x_k) &= \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_1} f_1(x_1, x_1, x_3) + \\ &+ \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\partial F_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + \\ &+ \frac{\partial F_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}{\partial x_{k-1}} f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Бачимо, що тільки останній доданок містить x_k . Тоді маємо вираз для часткової похідної

$$\frac{\partial F_k(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \frac{\partial f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k}$$

За індукцією отримуємо

$$\frac{\partial F_k(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \dots \frac{\partial f_{k-1}(x_1, x_1, \dots, x_k)}{\partial x_k} \quad (1.5)$$

Оцінимо модуль цієї похідної

$$\left| \frac{\partial F_k(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} \right| \geq a^{k-2} > 0$$

Тут функція $F_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ монотонна відносно x_k та при фіксованих $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ ця функція ін'єктивна і переводить $(-\infty, +\infty)$ в $(-\infty, +\infty)$. Отже, x_k виражається єдиним чином і має вигляд

$$x_k = H_k(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

При цьому функція $H_k(z_1, z_2, \dots, z_k)$ неперервно диференційовна по всіх аргументах.

Врешті-решт, отримуємо систему

$$x_1 = z_1,$$

$$x_2 = z_2,$$

$$x_k = H_k(z_1, z_2, \dots, z_k), \quad k = \overline{3, n}$$

Як було зазначено вище $x = x(t)$ - траєкторія системи (0.1) з керуванням $x_{n+1}(t) = u(t)$. З (1.2) та (1.3) випливає, що

$$\frac{d}{dt}F_k(x_1(t), \dots, x_k(t)) = F_{k+1}(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t)), \quad k = \overline{2, n}$$

Переписавши систему (1.2) через змінні $x_1, z_2, \dots, z_n$ та з керуванням z_{n+1} , отримаємо, що усі рівняння, окрім першого, є лінійними. Тобто система (1.2) матиме вигляд

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, z_2, H_3(x_1, x_2, x_3)),$$

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = \overline{2, n} \tag{1.6}$$

Тепер перейдемо до побудови керування та траєкторії. Побудуємо керування z_{n+1} , що переводить точку

$$z^0 = (z_2^0, z_3^0, \dots, z_n^0) = (x_2^0, F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \dots, F_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))$$

у точку

$$z^1 = (z_2^1, z_3^1, \dots, z_n^1) = (x_2^1, F_3(x_1^1, x_2^1, x_3^1), \dots, F_n(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1))$$

за час $T > 0$. Керування будемо шукати у вигляді

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \phi_i(t), \quad (1.7)$$

де $\phi_i(t)$ - лінійно незалежні функції. Нехай в ролі цих незалежних функцій будуть виступати поліноми, тобто $\phi_i(t) = t^i$, і, таким чином, шукане керування матиме вигляд

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i. \quad (1.8)$$

Підставимо це керування у систему (1.6). Маємо

$$z_{n-k}(t) = \sum_{i=0}^k z_{n-k+i}^0 \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i t^{i+k+1}}{(i+1) \dots (i+k+1)}, \quad k = \overline{0, n-2} \quad (1.9)$$

Зауважимо, що при $t = T$ $z_{n-k}(T) = z_{n-k}^1$. Перепишемо рівняння (1.9), підставляючи $t = T$, таким чином

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i T^{i+k+1}}{(i+1) \dots (i+k+1)} &= F_{n-k}(x_1^1, \dots, x_{n-k}^1) - \\ &- \sum_{i=0}^k F_{n-k+i}(x_1^0, \dots, x_{n-k+i}^0) \frac{T^i}{i!} - a_0 \frac{T^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k = \overline{0, n-2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Нехай параметр a_0 фіксований. Тоді система (1.10) має $n - 1$ рівняння відносно $n - 1$ змінних, а саме $a_1, \dots, a_{n-1}$. Подивимось на визначник системи (1.10). Маємо

$$\Delta = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \times T^{n(n-1)} \times \frac{1}{n} \times \frac{(1! \ 2! \ \dots \ (n-2)!)^2}{(n+1)! \ \dots \ (2n-2)!}$$

Бачимо, що матриця системи не є виродженою. Робимо висновок, що коефіцієнти $a_1, \dots, a_{n-1}$ полінома z_{n+1} визначаються з системи (1.10) як лінійні функції, що залежать від параметра a_0 .

Тепер підставимо коефіцієнти $a_1, \dots, a_{n-1}$ у (1.9) та (1.10). Отримуємо сім'ю керувань $z_{n+1}(t, a_0)$ і сім'ю траєкторій $(z_2(t, a_0), \dots, z_n(t, a_0))$ для системи (1.6). Тут кожна траєкторія з цієї сім'ї з'єднує точки z^0 та z^1 за час T .

Розділ 2

Керованість деякого класу майже трикутних систем

2.1. Застосування алгоритму до нового класу майже трикутних систем

Перейдемо до застосування вищезазначеного алгоритму до нашого класу систем вигляду (1.1). Для зручності наведемо цей алгоритм для тривимірної системи, тобто для системи вигляду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_2, x_3, u_2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^3$, $u_1 \in \mathbb{R}^1$, $u_2 \in \mathbb{R}^1$. Нехай виконуються вказані вище умови для часткових похідних f_i ($i = \overline{1, 3}$).

Зауважимо, що такий підхід можна використовувати для узагальненого випадку системи, тобто для системи n -порядку.

Наша задача полягає у тому, щоб побудувати керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$, які переводять систему з точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$ у початок координат. При цьому маємо допоміжну умову: ми потрапляємо у точку $x^1 = (x_2^1, x_3^1) = (0, 0)$ по координатах x_2 та x_3 за час $T = 1$ в силу системи (2.1). Спершу робимо заміну змінних, спираючись на (1.2)

$$z_1 = x_1 = F_1(x_1)$$

$$z_2 = x_2 = F_2(x_2)$$

$$z_3 = f_2(x_2, x_3) = F_3(x_2, x_3)$$

$$z_4 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} f_3 \equiv F_4(x_2, x_3, u_2)$$

Тоді отримуємо

$$x_2 = z_2, \quad x_3 = H_3(z_2, z_3) \quad (2.2)$$

та $z^0 = (x_1^0, F_2(x_2^0), F_3(x_2^0, x_3^0))$, $z^1 = (x_1^1, F_2(x_2^1), F_3(x_2^1, x_3^1))$.

Таким чином, ми зробили перехід до двовимірної системи. Будемо шукати $z_4(t)$ у вигляді поліному 1-ого степеня $z_4(t) = a_0 + a_1 t$. Знайдемо коефіцієнти цього полінома, спираючись на (1.10). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{2} &= F_3(x_2^1, x_3^1) - F_3(x_2^0, x_3^0) - a_0, \\ \frac{a_1}{6} &= F_2(x_2^1) - F_2(x_2^0) - F_3(x_2^0, x_3^0) - \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

Далі підставляємо у рівняння для керування $z_4(t)$ отримані вирази для a_0 та a_1 . Із (1.6) випливає, що, проінтегрувавши рівняння $z_4(t)$ один раз, отримаємо рівняння для $z_3(t)$, а проінтегрувавши двічі рівняння $z_4(t)$, отримаємо рівняння для $z_2(t)$. Підставивши отримані вирази у (2.2), отримаємо рівняння для $x_2(t)$ та для $x_3(t)$.

Підставляємо отримані рівняння для $z_2(t)$ та $z_3(t)$ у перше рівняння заданої системи, тобто у $\dot{x}_1$. Маємо диференціальне рівняння

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, z_2(t), H_3(x_1, z_2(t), z_3(t))) + u_1$$

Отримали, що $x_2(1) = 0$, $x_3(1) = 0$.

Нам необхідно потрапити у нуль по всіх координатах. Спершу потрібно, щоб при $t > 1$ координати $x_2(t)$ та $x_3(t)$ далі залишались нульовими. Це

дозволить нам звести задачу до одновимірної задачі для x_1 . Для цього необхідно обрати u_2 для $t > 1$ спеціальним чином, тобто таке керування u_2 , яке буде гарантувати незмінність нульового стану підсистеми (x_2, x_3) . Тобто має виконуватись

$$f_3(0, 0, u_2) = 0$$

Після цього за підбраного u_2 і при $x_3(t) = 0$, $t > 1$ має виконуватись

$$f_2(0, 0) = 0$$

Таким чином, система залишається в нульовому стані на інтервалі $t > 1$ і більше не потребує активного керування у цих координатах. Перейдемо до першого рівняння вихідної системи (2.1). Для $t > 1$ вже маємо $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 0$. Підставляємо ці значення у це рівняння:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, 0, 0) + u_1$$

Це рівняння вже залежить лише від x_1 та u_1 і є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку.

Тепер наше завдання - побудувати функцію керування u_1 так, аби $x_1(t) \equiv 0$ для $t > 1$ за скінченний час. Один із варіантів це покласти

$$u_1(t) = -f_1(x_1, 0, 0) + v(t),$$

де $v(t)$ - нове допоміжне керування.

тобто отримаємо

$$\dot{x}_1 = v(t)$$

І далі залишається обрати $v(t)$ таким чином, щоб задовільнялась умова попадання у початок координат по x_1 .

Таким чином, описаний алгоритм забезпечує ефективну побудову керування для нелінійної системи майже трикутного вигляду, що дозволяє гарантовано переводити систему в початок координат за скінченний час.

2.2. Приклад

Приклад 2.1. Маємо наступну систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2^3 + x_3^3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -4x_2^3 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_2\end{aligned}\tag{2.3}$$

Необхідно потрапити у початок координат за якийсь скінченний час. При цьому маємо початкову і допоміжну умови: $x^0 = (1, 1, 1)$, $(x_2^1, x_3^1) = (0, 0)$, $T = 1$.

Робимо заміну змінних спираючись на метод, наведений вище.

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \equiv F_1(x_1), \\ z_2 &= x_2 \equiv F_2(x_1, x_2), \\ z_3 &= f_2(x_2, x_3) = -4x_2^3 + x_3 \equiv F_3(x_2, x_3), \\ z_4 &= \frac{\partial F_3}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}f_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}f_3 = -12x_2^2(-4x_2^3 + x_3) + u_2 \equiv F_4(x_2, x_3, u_2)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Після цієї заміни змінних система набуває вигляду

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4\end{aligned}\tag{2.5}$$

Тоді можна виразити старі змінні через нові таким чином

$$\begin{aligned}x_2 &= z_2, \\x_3 &= z_3 + 4z_2^3\end{aligned}\tag{2.6}$$

і при цьому $z^0 = (1, 1, -3)$, $(z_2^1, z_3^1) = (0, 0)$. Шукаємо керування $z_4(t)$, яке переводить $(1, -3)$ в $(0, 0)$ за час $T = 1$ в силу системи (2.5). Нехай $z_4(t)$ має вигляд $z_4(t) = a_0 + a_1 t$. Знаходимо a_0, a_1, a_2 із системи (1.10):

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{2} &= 0 - (-3) - a_0, \\ \frac{a_1}{6} &= 0 - 1 - (-3) - \frac{a_0}{2}\end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}a_0 &= 6, \\ a_1 &= -6\end{aligned}$$

Підставимо в рівняння $z_4(t)$ і далі знайдемо вигляд рівнянь для $z_2(t)$ та $z_3(t)$.

$$\begin{aligned}z_2(t) &= 3t^2 - t^3 - 3t + 1, \\ z_3(t) &= 6t - 3t^2 - 3, \\ z_4(t) &= 6 - 6t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Далі підставимо отримані вирази у (1.10):

$$\begin{aligned}x_2(t) &= 3t^2 - t^3 - 3t + 1, \\ x_3(t) &= 6t - 3t^2 - 3,\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

Бачимо, що за час $T = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$. Хочемо, аби x_2 і x_3 далі й залишались нулями. Повертаємось до початкової системи. Покладемо $u_2 = 0$ і дійсно x_2 і x_3 дорівнюють нулю при $t > 1$. Подивимось на перше рівняння вихідної системи. Отримуємо

$$\dot{x}_1 = x_1 + f(t) + u_1,$$

де $f(t) = -z_2^3(t) + (z_3(t) + 4z_2^3(t))^3$.

Тут для $t > 1$ маємо $x_2 = 0$ і $x_3 = 0$, тобто $f(t) = 0$ і

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1,$$

Оскільки обмежень на керування немає, то обираємо керування u_1 таким чином

$$u_1 = -x_1 + v,$$

де $v = \pm 1$. Тобто маємо 2 варіанти керування. Обираємо $v = -1$, аби потрапити у початок координат.

Тоді отримуємо рівняння

$$\dot{x}_1 = -1$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо при $t > 1$:

$$x_1(t) = -t + 2$$

При $t = 2$ зможемо потрапити в 0. Врешті-решт, отримуємо рівняння:

$$x_2(t) = 3t^2 - t^3 - 3t + 1,$$

$$x_3(t) = 6t - 3t^2 - 3$$

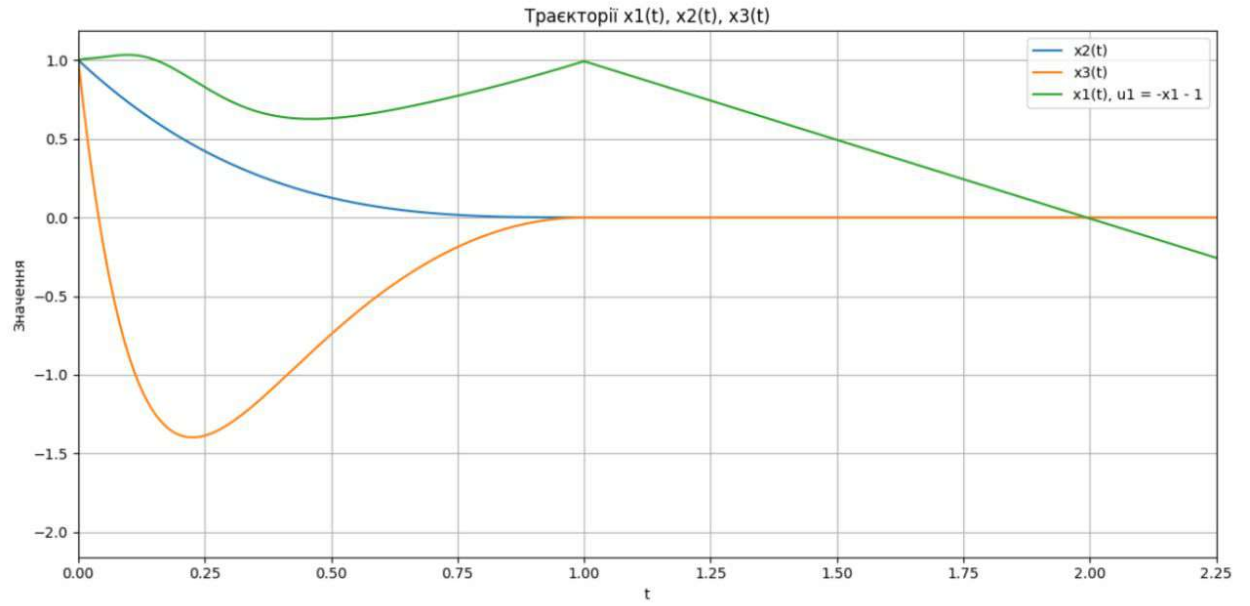


Рис. 2.1: Графік компонент траєкторії $x(t)$

Висновки

У цій роботі було досліджено задачу побудови керування для нелінійних систем майже трикутного вигляду, тобто для таких, що допускають часткову лінеаризацію. Було розширено клас майже трикутних систем з двома керуваннями: тільки перше рівняння системи залежить від x_1 і до нього лінійно входить керування u_1 , решта рівнянь формують підсистему трикутного вигляду з керуванням u_2 . До нового класу таких систем було застосовано вже відомий алгоритм побудови керування та знаходження траєкторій. Підхід ґрунтується на покроковому переведенні змінних, стабілізації частини системи за допомогою поліноміального керування, подальшому утриманні досягнутого стану та побудові керування для залишкової підсистеми.

У якості подальших досліджень можна виділити наступні аспекти. По-перше, для керування можна вибрати інші лінійно незалежні функції замість поліномів, які були запропоновані у статті [6] та використані у цій роботі. По-друге, цікавою перспективою є встановлення обмежень на керування u_1 та u_2 .

Список використаних джерел

- [1] Korobov VI (1973) Controllability, stability of certain nonlinear systems. Differential Equations 9:466–469
- [2] Sklyar EV (2002) The mapping of triangular controlled systems onto linear systems without changing the control. Differ Equ 38:35–46
- [3] Krener AJ (1973) On the equivalence of control systems and linearization of nonlinear systems. SIAM J Control 11:670–676
- [4] Kokotovic PV (1992) The joy of feedback: nonlinear and adaptive. IEEE Control Syst Mag 12(3):7–17
- [5] Isidori A (1999) Nonlinear control systems II. Springer, London
- [6] Korobov VI (2021) Almost linearizable control systems. Math. Control Signals Syst., 33(3): 473–497.
- [7] Korobov VI, Sklyar KV, Ignatovich SY (2024) Almost feedback linearizable systems of the class C^1 and solving the constructive controllability problem, IMA Journal of Mathematical Control and Information (2024) 41, 356–377
- [8] Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishechenko E. F., The Mathematical Theory of Optimal Processes. John Wiley and Sons. New York/London, 1962. 360 p.